Listy Biometryczne
Nr 46-48 (1975)

Bronisław C e r a n k a (Poznań)

DOŚWIADCZALNE UKŁADY BLOKOWE Z DWIEMA LICZBAMI REPLIKACJI [1]

Wstęp

W licznych typach układów standardowych o blokach niekompletnych wszystkie obiekty replikowane są jednakową liczbę razy. To wymaganie często nie jest wygodne w praktyce, a nieraz wręcz nie może być spełnione. W tej sytuacji powstaje zapotrzebowanie na układy o blokach niekompletnych, w których liczba replikacji nie jest jednakowa dla każdego obiektu. W pracy tej rozpatrzymy wewnątrz-i międzygrupowo zrównoważone doświadczalne układy blokowe, w których niektóre obiekty replikowane są r_1 razy, a pozostałe r_2 razy. Układy tego typu omawiane były przez Corstena [3] w oparciu o tak zwaną macierz incydencji $\underline{n}$. Dalsze metody konstrukcji układów wewnątrz-i międzygrupowo zrównoważonych podał Agrawal [1] w oparciu o macierz zredukowanego układu równań normalnych $\underline{C}$. W przedstawionej pracy rozważa się te układy w oparciu o pierwiastki charakterystyczne pewnej macierzy $\underline{M}_0$ charakteryzującej układ, wprowadzonej przez Calińskiego [2].

1. Wewnątrz-i międzygrupowo zrównoważone doświadczalne układy blokowe z dwiema liczbami replikacji

Wewnątrz i międzygrupowo zrównoważone doświadczalne układy blokowe rozważane były przez Corstena [3] i Agrawala [1]. Układy te są układami z dwoma kierunkami klasyfikacji. Pierwszy kierunek

[1] Praca wykonana pod kierunkiem prof. dr habil. Tadeusza Calińskiego w ramach problemu węzłowego 06.1.1 koordynowanego przez Instytut Matematyczny PAN.

klasyfikacji obejmuje b klas (nazywanych blokami) o stałej wielkości k. Druga klasyfikacja dotyczy obiektów. Obiekty w liczbie $t = t_1 + t_2$ dzielą się na dwie grupy składające się z t_1 i t_2 obiektów, rozmieszczonych w taki sposób na k jednostkach doświadczalnych w każdym z b bloków, że:

1. t_1 obiektów jest replikowanych r_1 razy w b blokach o wielkości k_1,

2. t_2 obiektów jest replikowanych r_2 razy w b blokach o wielkości k_2,

3. każda para obiektów pierwszej grupy występuje razem w λ_{11} blokach,

4. każda para obiektów drugiej grupy występuje razem w λ_{22} blokach,

5. każda para obiektów, z których jeden jest z pierwszej grupy, a drugi obiekt z drugiej grupy występuje razem w λ_{12} blokach.

Między wymienionymi parametrami zachodzą następujące związki:

$$\lambda_{12} = \lambda_{21}$$

$$bk_1 + bk_2 = bk = r_1t_1 + r_2t_2 = N_1 + N_2 = N$$

$$r_1(k - 1) = \lambda_{11}(t_1 - 1) + \lambda_{12}t_2$$

$$r_2(k - 1) = \lambda_{12}t_1 + \lambda_{22}(t_2 - 1).$$

Dodatkowo załóżmy że $r_1 < r_2$. Ponieważ $\lambda_{12} = 0$ implikuje rozłączność układu, zatem zakładamy, że $\lambda_{12} \geq 1$. Oczywiście $\lambda_{11} \leq r_1$ i $\lambda_{22} \leq r_2$. Równość $\lambda_{11} = r_1$ oznacza, że każdy blok zawiera wszystkie obiekty pierwszej grupy i analogicznie równość $\lambda_{22} = r_2$ oznacza, że każdy blok zawiera wszystkie obiekty drugiej grupy. Oczywiście również $\lambda_{12} \leq r_1$. Równość oznacza, że w każdym bloku spotykają się wszystkie obiekty drugiej grupy z kilkoma obiektami pierwszej grupy, zatem $\lambda_{12} = r_1$ implikuje $\lambda_{22} = r_2$. Przy założeniu $\lambda_{12} \geq 1$ relacje $r_1 = \lambda_{11}$ i $r_2 = \lambda_{22}$ nie mogą zachodzić równocześnie bo $r_1 < r_2$. Jak wiadomo, układ blokowy możemy opisać jednoznacznie za pomocą macierzy $\underline{n}$, typu $t \times b$, której wiersze odpowiadają poszczególnym obiektom, a kolumny poszczególnym blokom; element z i-tego wiersza i j-tej kolumny tej macierzy jest równy liczbie jednostek należących równocześnie do i-tego obiektu oraz j-tego bloku. Tak określona macierz $\underline{n}$ nazywa się macierzą incydencji. Dalej niech $\underline{n}_1$, typu $t_1 \times b$ będzie macierzą incydencji dla pierwszej, a $\underline{n}_2$, typu $t_2 \times b$ będzie macierzą incydencji dla drugiej grupy obiektów. Wówczas można napisać $\underline{n} = \left[\underline{n}_1', \underline{n}_2'\right]'$.

W dalszych rozważaniach przydatny będzie następujący zapis niektórych wielkości charakteryzujących układ blokowy. Liczby replikacji poszczególnych obiektów zapiszemy w postaci wektora $\underline{r} = [r_1\underline{1}', r_2\underline{1}']'$, a wielkości bloków przedstawimy wektorem $\underline{k} = k\underline{1}$, gdzie $\underline{1}$ oznacza wektor odpowiedniego wymiaru złożony z samych jedynek. Wprowadzimy także macierz diagonalną $\underline{r}^{\delta}$ o elementach diagonalnych będących składowymi wektora $\underline{r}$ oraz macierz diagonalną $\underline{k}^{\delta}$ o elementach diagonalnych będących składowymi wektora $\underline{k}$. Przez $\underline{r}^{-\delta}$ rozumieć będziemy macierz odwrotną do $\underline{r}^{\delta}$, a przez $\underline{k}^{-\delta}$ macierz odwrotną do $\underline{k}^{\delta}$. Niektóre właściwości układów doświadczalnych można określić za pomocą pierwiastków charakterystycznych macierzy $\underline{\underline{M}}_0$ wprowadzonej przez Calińskiego [2]. Macierz ta jest zdefiniowana następująco:

$$\underline{\underline{M}}_0 = \underline{r}^{-\delta}\,\underline{\underline{n}}\,\underline{k}^{-\delta}\,\underline{\underline{n}}' - \underline{1}\,\underline{r}'/N.$$

O macierzy $\underline{\underline{M}}_0$ dowodzi się, że żaden jej pierwiastek charakterystyczny nie jest większy od jedności. Macierz $\underline{\underline{n}}\,\underline{k}^{-\delta}\,\underline{\underline{n}}'$ występująca we wzorze macierzy $\underline{\underline{M}}_0$ przyjmuje w naszym przypadku postać $k^{-1}\,\underline{\underline{n}}\,\underline{\underline{n}}'$, gdzie macierz $\underline{\underline{n}}\,\underline{\underline{n}}'$ nazywamy macierzą asocjacji. Macierz asocjacji dla wewnątrz-i międzygrupowo zrównoważonych układów blokowych przyjmuje postać

$$\underline{\underline{n}}\,\underline{\underline{n}}' = \begin{bmatrix} \underline{\underline{n}}_1\underline{\underline{n}}_1' & \underline{\underline{n}}_1\underline{\underline{n}}_2' \\ \underline{\underline{n}}_2\underline{\underline{n}}_1' & \underline{\underline{n}}_2\underline{\underline{n}}_2' \end{bmatrix}.$$

Ponieważ rozważany układ przy ograniczeniu do każdej z obu grup obiektów jest układem zrównoważonym o blokach niekompletnych, zatem można napisać, że

$$\underline{\underline{n}}_1\underline{\underline{n}}_1' = (r_1 - \lambda_{11})\,\underline{\underline{I}} + \lambda_{11}\,\underline{1}\,\underline{1}',$$
$$\underline{\underline{n}}_2\underline{\underline{n}}_2' = (r_2 - \lambda_{22})\,\underline{\underline{I}} + \lambda_{22}\,\underline{1}\,\underline{1}'$$

oraz, że

$$\underline{\underline{n}}_1\underline{\underline{n}}_2' = \lambda_{12}\,\underline{1}\,\underline{1}',$$
$$\underline{\underline{n}}_2\underline{\underline{n}}_1' = \lambda_{12}\,\underline{1}\,\underline{1}'.$$

Wykorzystując ostatnie równości można macierz $\underline{\underline{M}}_0$ dla rozważanych układów zapisać w postaci:

$$\underline{\underline{M}}_0 = \frac{1}{N}\begin{bmatrix} \dfrac{b(r_1-\lambda_{11})}{r_1}\underline{\underline{I}} + \dfrac{b\lambda_{11}-r_1^2}{r_1}\underline{1}\,\underline{1}' & \dfrac{\lambda_{12}b-r_1r_2}{r_1}\underline{1}\,\underline{1}' \\ \dfrac{\lambda_{12}b-r_1r_2}{r_2}\underline{1}\,\underline{1}' & \dfrac{b(r_2-\lambda_{22})}{r_2}\underline{\underline{I}} + \dfrac{b\lambda_{22}-r_2^2}{r_2}\underline{1}\,\underline{1}' \end{bmatrix}$$

W zależności od liczby zerowych pierwiastków równania charakterystycznego $|\underline{M}_0 - \nu \underline{I}| = 0$ można rozróżnić kilka szczegółowych typów układów wewnątrz i międzygrupowo zrównoważonych. Ogólnie równanie to posiada zawsze jeden pierwiastek zerowy. Pozostałe pierwiastki tego równania są: $\nu_1 = (r_1 - \lambda_{11})/kr_1$ o krotności $t_1 - 1$, $\nu_2 = (r_2 - \lambda_{22})/kr_2$ o krotności $t_2 - 1$ i $\nu_3 = (r_1 r_2 - \lambda_{12} b)/r_1 r_2$ (o krotności 1). Jeżeli $r_1 = \lambda_{11}$ wtedy równanie charakterystyczne posiada t_1 pierwiastków zerowych i mamy wtedy układy typu C omawiane przez Corstena [3]. Układ ten powstaje przez połączenie układu o kompletnych blokach zrandomizowanych z układem zrównoważonym o blokach niekompletnych. Jeżeli $r_2 = \lambda_{22}$ wtedy równanie charakterystyczne posiada t_2 pierwiastków zerowych i mamy układy typu B. Układ ten również powstaje przez połączenie układu o kompletnych blokach zrandomizowanych z układem zrównoważonym o blokach niekompletnych. Układy typu B tym różnią się od układów typu C, że w układach typu C każdy obiekt układu o kompletnych blokach zrandomizowanych jest replikowany r_1 razy, a każdy obiekt w dołączonym układzie zrównoważonym o blokach niekompletnych jest replikowany r_2 razy, przy czym $r_1 < r_2$, natomiast w układach typu B każdy obiekt układu o kompletnych blokach zrandomizowanych jest replikowany r_2 razy, a każdy obiekt w dołączonym układzie zrównoważonym o blokach niekompletnych jest replikowany r_1 razy, przy czym także $r_1 < r_2$. Jeżeli $r_1 r_2 = \lambda_{12} b$ wtedy równanie charakterystyczne posiada 2 pierwiastki zerowe i mamy do czynienia z układem typu D. Układy te powstają przez odpowiednie połączenie dwóch układów zrównoważonych o blokach niekompletnych. Jeżeli $r_2 = \lambda_{22}$ i $r_1 r_2 = \lambda_{12} b$ wtedy równanie charakterystyczne posiada t_2+1 pierwiastków zerowych i mamy do czynienia z układami typu A. W tym typie układów każdy blok zawiera wszystkie obiekty drugiej grupy i $k-t_2$ obiektów pierwszej grupy. W przypadku tylko jednego pierwiastka zerowego omawiane układy są typu E. Układy tego typu powstają przez odpowiednie skreślenie kilku lub jednego bloku w układzie zrównoważonym o blokach niekompletnych.

Z ogólnej teorii układów doświadczalnych wiadomo (patrz [2]), że jeżeli $\underline{s}$ jest kontrastem obiektowym będącym jednocześnie wektorem charakterystycznym macierzy $\underline{M}_0$ odpowiadającym pierwiastkowi charakterystycznemu ν, to wielkość $E = 1 - \nu$ nazywamy współczynnikiem efektywności danego układu blokowego względem kontrastu $\underline{s}$. Dla kontrastów obiektowych $\underline{s}$, które są wektorami charakterystycznymi macierzy $\underline{M}_0$ zachodzi ponadto równość $\underline{M}_0 \underline{s} = \nu \underline{s}$. Kontrastami takimi są: wszystkie kontrasty wewnątrz pierwszej grupy obiektów, wszystkie kontrasty wewnątrz drugiej grupy obiektów oraz kontrast między pierwszą a drugą grupą obiektów tzn. kontrast $\underline{s} = \left[t_2 r_2 \underline{1}' - t_1 r_1 \underline{1}'\right]$. Wszystkie kontrasty wewnątrz pierwszej grupy mają współczynnik efektywności $E_1 = 1 - \nu_1 = (\lambda_{11} t_1 + \lambda_{12} t_2)/kr_1$. Wszystkie kontrasty wewnątrz drugiej grupy mają współczynnik efektywności $E_2 = 1 - \nu_2 = (\lambda_{22} t_2 + \lambda_{12} t_1)/kr_2$. Współczynnik efektywności kontrastu między pierwszą a drugą grupą obiektów jest równy $E_3 = 1 - \nu_3 = b\lambda_{12}/r_1 r_2$. Zatem w poszczególnych typach układów mamy następujące sytuacje.

Typ A. Ponieważ $\nu_2 = \nu_3 = 0$ więc układ jest ortogonalny względem kontrastów wewnątrz drugiej grupy obiektów i kontrastu między pierwszą a drugą grupą, stąd współczynnik efektywności tych kontrastów jest równy 1. Natomiast współczynnik efektywności kontrastów wewnątrz pierwszej grupy jest równy E_1.

Typ B. Ponieważ $\nu_2 = 0$ więc układ jest ortogonalny względem kontrastów wewnątrz drugiej grupy obiektów i stąd współczynnik efektywności tych kontrastów jest równy 1. Współczynnik efektywności kontrastów wewnątrz pierwszej grupy obiektów jest równy E_1, a współczynnik efektywności kontrastu między pierwszą a drugą grupą obiektów jest równy E_3.

Typ C. Ponieważ $\nu_1 = 0$ więc układ jest ortogonalny względem kontrastów wewnątrz pierwszej grupy obiektów i stąd współczynnik efektywności tych kontrastów jest równy 1. Współczynnik efektywności kontrastów wewnątrz drugiej grupy jest równy E_2, a współczynnik efektywności kontrastu między pierwszą a drugą grupą obiektów jest równy E_3.

Typ D. Ponieważ $\nu_3 = 0$, więc układ jest ortogonalny względem kontrastu między pierwszą a drugą grupą obiektów i stąd współczynnik efektywności tego kontrastu jest równy 1. Współczynnik efektywności kontrastów wewnątrz pierwszej grupy obiektów jest równy E_1, a współczynnik efektywności kontrastów wewnątrz drugiej grupy obiektów jest równy E_2.

Typ E. Współczynnik efektywności kontrastów wewnątrz pierwszej grupy obiektów jest równy E_1. Współczynnik efektywności kontrastów wewnątrz drugiej grupy obiektów jest równy E_2. Natomiast współczynnik efektywności kontrastu między pierwszą a drugą grupą obiektów jest równy E_3.

Dowodzi się także, że macierz $\underline{M}_0$ może być zapisana w następpującej postaci

$$\underline{M}_0 = \sum_h \nu_h \underline{L}_h ,$$

gdzie ν_h są różnymi pierwiastkami charakterystycznymi macierzy $\underline{M}_0$, a $\underline{L}_h$ odpowiednimi macierzami idempotentnymi (por. [5], [2]). Dla układów wewnątrz i międzygrupowo zrównoważonych powyższe rozwinięcie macierzy $\underline{M}_0$ przyjmuje następującą postać:

$$\underline{M}_0 = \nu_1 \begin{bmatrix} (\underline{I} - \frac{1}{t}\underline{1}\,\underline{1}') & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{0} \end{bmatrix} + \nu_2 \begin{bmatrix} \underline{0} & \underline{0} \\ \underline{0} & (\underline{I} - \frac{1}{t}\underline{1}\,\underline{1}') \end{bmatrix} +$$

$$+ \nu_3 \begin{bmatrix} \frac{t_2 r_2}{t_1 bk}\underline{1}\,\underline{1}' & \frac{-r_2}{bk}\underline{1}\,\underline{1}' \\ \frac{-r_1}{bk}\underline{1}\,\underline{1}' & \frac{t_1 r_1}{t_2 bk}\underline{1}\,\underline{1}' \end{bmatrix} = \nu_1 \underline{L}_1 + \nu_2 \underline{L}_2 + \nu_3 \underline{L}_3 .$$

Można łatwo sprawdzić, że $\underline{L}_1$, $\underline{L}_2$ i $\underline{L}_3$ są macierzami idempotentnymi.

Szczególnym przypadkiem rozważanych układów, są układy rozszerzone omawiane przez Pearce'a [4]. W tych układach pierwszą grupę obiektów stanowi układ zrównoważony o blokach niekompletnych, a drugą grupę obiektów stanowi układ o kompletnych blokach zrandomizowanych. Dla tych układów $r_2 = \lambda_{22} = b$ oraz $r_1 = \lambda_{12}$ i stąd pierwiastki charakterystyczne ν_2 i ν_3 macierzy $\underline{M}_0$ są zerami.

Caliński [2] rozważa połączenie dwóch układów, z których pierwszy jest układem całkowicie zrównoważonym, a drugi jest układem ortogonalnym. Wtedy

$$\underline{M}_0 = \nu \begin{bmatrix} \underline{I} - \underline{1}\,\underline{r}'/N_1 & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{0} \end{bmatrix}$$

gdzie $\nu = (N_1/N)\,\nu_1$, przy czym ν_1 jest pierwiastkiem charakterystycznym układu całkowicie zrównoważonego.

Jeżeli za układ całkowicie zrównoważony weźmiemy układ zrównoważony o blokach niekompletnych, który rozszerzymy tylko o jeden obiekt, wtedy uzyskujemy układy typu S omówione przez Pearce'a [4].

Metody konstrukcji każdego z powyżej rozważanych typów układów zostały szczegółowo omówione przez Corstena [3]. Dalsze uzupełnienia w konstrukcji zostały wprowadzone przez Agrawala [1].

2. Analiza wariancji

Rozpatrzmy znany model analizy wariancji, zapisany w postaci macierzowej

$$\underline{y} = \underline{A}\,\underline{\Theta} + e = \left[\underline{1}, \underline{D}', \underline{\Delta}'\right]\left[\mu, \underline{\alpha}', \underline{\tau}'\right]' + e,$$

gdzie $\underline{y}$ jest wektorem obserwacji, typu $N \times 1$, a macierz układu $A = \left[\underline{1}, \underline{D}', \underline{\Delta}'\right]$, typu $N \times (1 + b + t)$, składa się z trzech podmacierzy odpowiadających trzem rodzajom parametrów występujących w wektorze $\underline{\Theta} = \left[\mu, \underline{\alpha}', \underline{\tau}'\right]'$, typu $(1+b+t) \times 1$. Wektor jedynek $\underline{1}$ typu $N \times 1$ odpowiada parametrowi ogólnemu μ (skalarowi) wspólnemu wszystkim N obserwacjom. Macierz układu $\underline{D}'$ dla bloków, typu $N \times b$, odpowiada wektorowi parametrów blokowych $\underline{\alpha}$, typu $b \times 1$, a macierz układu $\underline{\Delta}'$ dla obiektów, typu $N \times t$, odpowiada wektorowi parametrów obiektowych $\underline{\tau}$, typu $t \times 1$. Wektor $\underline{e}$, typu $N \times 1$, jest wektorem błędów losowych takich, że $E(\underline{e}) = 0$ oraz $E(\underline{e}\underline{e}') = \sigma^2\underline{I}$, przy czym $\underline{I}$ jest macierzą jednostkową typu $N \times N$. Przy omawianiu testów i przedziałów ufności będziemy nadto zakładać, że każda składowa wektora $\underline{e}$ ma jednakowy rozkład normalny jednowymiarowy $N(0, \sigma^2)$. Wówczas składowe wektora $\underline{e}$ będą statystycznie niezależne.

Zakładając, że macierz $\underline{A}$ jest rzędu $b+t-1$ i przyjmując warunki uboczne $\underline{k}'\underline{\alpha} = 0 = \underline{r}'\underline{\tau}$ uzyskuje się metodą najmniejszych kwadratów układ estymatorów postaci

$$\begin{bmatrix} \hat{\mu} \\ \hat{\underline{\alpha}} \\ \hat{\underline{\tau}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G/N \\ \underline{k}^{-\delta}(\underline{R} - \underline{n}_0'\hat{\underline{\tau}}) \\ \underline{\Omega}\,\underline{Q} \end{bmatrix}.$$

Macierz kowariancji tego estymatora jest równa

$$\sigma^2 \begin{bmatrix} 1/N & \underline{0}' & \underline{0}' \\ \underline{0} & \underline{k}^{-\delta}(\underline{k}^{\delta} + \underline{n}_0'\underline{\Omega}\,\underline{n}_0)\,\underline{k}^{-\delta} - \underline{1}\,\underline{1}'/N & -\underline{k}^{-\delta}\underline{n}_0'\underline{\Omega} \\ \underline{0} & -\underline{\Omega}\,\underline{n}_0\,\underline{k}^{-\delta} & \underline{\Omega} - \underline{1}\,\underline{1}'/N \end{bmatrix}.$$

Wprowadzone tutaj wektory i macierze są zdefiniowane następująco:

$$\underline{Q} = \underline{T} - \underline{n}\,\underline{k}^{-\delta}\underline{B},$$
$$\underline{R} = \underline{B} - (G/N)\underline{k},$$
$$\underline{n}_0 = \underline{n} - \underline{r}\,\underline{k}'/N,$$
$$\underline{\Omega}^{-1} = \underline{r}^{\delta} - \underline{n}\,\underline{k}^{-\delta}\underline{n}' + \underline{r}\,\underline{r}'/N,$$

gdzie $\underline{T}$ jest wektorem sum obiektowych, $\underline{B}$ jest wektorem sum blokowych, a G jest sumą wszystkich obserwacji (macierz $\underline{\Omega}^{-1}$ została wprowadzona przez Tochera [6]). Z macierzy kowariancji uzyskamy łatwo wariancję dla dowolnego estymatora oraz kowariancję dla dowolnej pary takich estymatorów. W praktycznych zastosowaniach interesują nas zwykle estymatory funkcji parametrów μ i $\underline{\tau}$, w szczególności estymator wektora $\mu\underline{1} + \underline{\tau}$. Ten ostatni estymator ma oczywiście postać wektora $\underline{a} = \hat{\mu}\underline{1} + \hat{\underline{\tau}}$, którego składowe nazywamy poprawionymi średnimi dla obiektów. Z układu estymatorów o najmniejszych kwadratach uzyskujemy $\underline{a} = (G/N)\underline{1} + \underline{\Omega}\,\underline{Q}$, o macierzy kowariancji $\sigma^2\,\underline{\Omega}$.

Dla dowolnej funkcji liniowej poprawionych średnich obiektowych $\psi = \underline{c}'\underline{a}$, otrzymujemy jako wariancję $\sigma^2\underline{c}'\underline{\Omega}\,\underline{c}$ i stąd jako standardowy błąd tej funkcji otrzymujemy

$$s_d = \sqrt{\hat{\sigma}^2\underline{c}'\underline{\Omega}\,\underline{c}}\,.$$

Jeśli dla danej funkcji zachodzi równość $\underline{c}'\underline{1} = 0$ tzn. funkcja ta jest porównaniem (kontrastem), wówczas $\psi = \underline{c}'\hat{\underline{\tau}} = \underline{c}'\underline{\Omega}\,\underline{Q}$. Decydującą rolę w analizie statystycznej wyników doświadczenia odgrywa macierz $\underline{\Omega}^{-1}$ i odwrotna do niej macierz $\underline{\Omega}$. Stopień trudności analizy zależy od możliwości numerycznych znalezienia macierzy $\underline{\Omega}$. Jak wiadomo macierz $\underline{\Omega}^{-1}$ można przedstawić w postaci $\underline{\Omega}^{-1} = \mathrm{r}^{\delta}(\underline{I} - \underline{M}_0)$, a stąd (patrz [2])

$$\underline{\Omega} = \Big(\underline{I} + \sum_h \frac{\nu_h}{1-\nu_h}\,\underline{L}_h\Big)\,\underline{r}^{-\delta}\,.$$

Dla rozważanych układów otrzymujemy

$$\underline{\Omega} = \begin{bmatrix} \underline{\Omega}_{11} & \underline{\Omega}_{12} \\ \underline{\Omega}_{21} & \underline{\Omega}_{22} \end{bmatrix}$$

gdzie

$$\underline{\Omega}_{11} = \frac{k}{\lambda_{11}t_1+\lambda_{12}t_2}\,\underline{I} + \left(\frac{1}{bk} + \frac{r_2}{\lambda_{12}bt_1} - \frac{r_1r_2}{b^2k\,\lambda_{12}} - \frac{k}{t_1(\lambda_{11}t_1+\lambda_{12}t_2)}\right)\underline{1}\,\underline{1}',$$

$$\underline{\Omega}_{22} = \frac{k}{\lambda_{22}t_2+\lambda_{12}t_1}\,\underline{I} + \left(\frac{1}{bk} + \frac{r_1}{\lambda_{12}bt_2} - \frac{r_1r_2}{b^2k\lambda_{12}} - \frac{k}{t_2(\lambda_{22}t_2+\lambda_{12}t_1)}\right)\underline{1}\,\underline{1}',$$

$$\underline{\Omega}_{12} = \left(\frac{1}{bk} - \frac{r_1r_2}{\lambda_{12}b^2k}\right)\underline{1}\,\underline{1}',$$

$$\underline{\Omega}_{21} = \left(\frac{1}{bk} - \frac{r_1r_2}{\lambda_{12}b^2k}\right)\underline{1}\,\underline{1}'.$$

Estymatorem wariancji σ^2 jest średni kwadrat dla błędu $s^2 = SSE/(N-t-b+1)$, gdzie SSE uzyskujemy z minimalizacji następującej formy kwadratowej

$$SSE = \min(\underline{y} - \underline{A}\,\theta)'(\underline{y} - \underline{A}\,\underline{\theta}) = (\underline{y}'\underline{y} - G^2/N) - \underline{R}'\underline{k}^{-\delta}\,\underline{R} - \underline{Q}'\Omega\,\underline{Q}.$$

W celu przeprowadzenia testowania hipotezy o równości prawdziwych średnich obiektowych tzn. hipotezy H: $\underline{\tau} = \underline{0}$, znajduje się minimum warunkowe następującej formy kwadratowej:

$$\min_{\underline{\tau}=\underline{0}} (\underline{y} - \underline{A}\,\underline{\theta})'(\underline{y} - \underline{A}\,\underline{\theta}) = \underline{y}'\underline{y} - G^2/N - \underline{R}'\underline{k}^{-\delta}\,\underline{R} = SSE + \underline{Q}'\Omega\,\underline{Q}.$$

Stąd funkcja testowa przyjmuje postać

$$F = \frac{\underline{Q}'\Omega\,\underline{Q}/(t-1)}{SSE/(N-t-b+1)}.$$

Jeśli hipoteza zerowa jest prawdziwa, to iloraz ten ma rozkład F z t-1 i N-t-b+1 stopniami swobody. Tym samym hipotezę H odrzucimy na poziomie α wtedy i tylko wtedy, gdy $F > F_{\alpha;t-1,N-t-b+1}$, gdzie $F_{\alpha;t-1,N-t-b+1}$ jest odpowiednią wartością krytyczną z tablicy rozkładu F Fishera-Snedecora.

Dokonując rozbicia wektora $\underline{Q}$ na dwa podwektory: $\underline{Q}_1$ odpowiadający pierwszej grupie obiektów i $\underline{Q}_2$ odpowiadający drugiej grupie obiektów, możemy sumę kwadratów występującą w liczniku funkcji testowej przedstawić w następującej postaci:

$$\begin{aligned}\underline{Q}'\Omega\,\underline{Q} &= \underline{Q}_1'\,\Omega_{11}\,\underline{Q}_1 + \underline{Q}_2'\,\Omega_{22}\,\underline{Q}_2 + \underline{Q}_1'\Omega_{12}\,\underline{Q}_2 + \underline{Q}_2'\,\Omega_{21}\,\underline{Q}_1 = \\ &= \frac{k}{\lambda_{11}t_1 + \lambda_{12}t_2}\left(\underline{Q}_1'\underline{Q}_1 - \frac{1}{t_1}\,\underline{Q}_1'\,\underline{1}\,\underline{1}'\underline{Q}_1\right) + \\ &+ \frac{k}{\lambda_{22}t_2 + \lambda_{12}t_1}\left(\underline{Q}_2'\underline{Q}_2 - \frac{1}{t_2}\,\underline{Q}_2'\,\underline{1}\,\underline{1}'\,\underline{Q}_2\right) + \\ &+ \left\{\frac{r_2}{\lambda_{12}bt_1}\,\underline{Q}_1'\,\underline{1}\,\underline{1}'\underline{Q}_1 + \frac{r_1}{\lambda_{12}bt_2}\,\underline{Q}_2'\,\underline{1}\,\underline{1}'\underline{Q}_2\right\} = SST_1 + SST_2 + SST_{12}.\end{aligned}$$

Forma kwadratowa SST_1 jest poprawioną sumą kwadratów dla obiektów wewnątrz pierwszej grupy. SST_2 jest poprawioną sumą kwadratów dla obiektów wewnątrz drugiej grupy, natomiast SST_{12} jest poprawioną sumą kwadratów dla obiektów między pierwszą a drugą grupą. Widzimy zatem, że poprawiona suma kwadratów dla obiektów została rozbita na trzy niezależne składniki, pierwszy o t_1-1 stopniach swobody, drugi o t_2-1 stopniach swobody i trzeci o 1 stopniu swobody. Zatem możemy tutaj testować również interesujące nas hipotezy szczegółowe:

1. O równości prawdziwych średnich obiektowych wewnątrz pierwszej grupy obiektów przy pomocy funkcji testowej

$$F = \frac{SST_1/(t_1-1)}{SSE/(N-t-b+1)} .$$

2. O równości prawdziwych średnich obiektowych wewnątrz drugiej grupy obiektów przy pomocy funkcji testowej

$$F = \frac{SST_2/(t_2-1)}{SSE/(N-t-b+1)} .$$

3. O równości prawdziwej średniej pierwszej i drugiej grupy przy pomocy funkcji testowej

$$F = \frac{SST_{12}}{SSE/(N-t-b+1)} .$$

Wyniki tej analizy wariancji przedstawiono w tabeli 2.1.

Tabela 2.1

Źródło zmienności	Suma kwadratów	Stopnie swobody	Średni kwadrat
Bloki	$\underline{R}'\underline{k}^{-\delta}\underline{R}$	b-1	
Obiekty:			
wewnątrz 1-szej grupy	SST_1	t_1-1	$SST_1/(t_1-1)$
wewnątrz 2-giej grupy	SST_2	t_2-1	$SST_2/(t_2-1)$
między grupami	SST_{12}	1	SST_{12}
Błąd	SSE	N-t-b+1	SSE/(N-t-b+1)
Razem	$\underline{y}'\underline{y} - G^2/N$	N-1	

3. Przykłady

Rozważmy za Corstenem [3] następujący przykład (dane fikcyjne).

Tabela 3.1

Bloki / Obiekty	1	2	3	4	5	6	$\underline{T}$	$\underline{Q}$	$\Omega\underline{Q}=\hat{\underline{\tau}}$	$\underline{a}$
1	22,5	21,0					43,5	0,400	-0,061	21,167
2			24,2	23,8			48,0	4,433	2,964	24,192
3					20,7	19,5	40,2	-0,500	-0,736	20,492
4	21,7		21,2		19,9		62,8	-1,267	-0,440	20,788
5	22,8			22,4		22,0	67,2	2,333	1,103	22,331
6		18,4	17,1			17,9	53,4	-8,000	-3,326	17,902
7		22,9		22,0	22,1		67,0	2,600	1,217	22,445
$\underline{B}'$	67,0	62,3	62,5	68,2	62,7	59,4	382,1			
$\underline{R}'$	3,316	-1,384	-1,184	4,516	-0,984	-4,284				
							$\bar{y}$ = 21,228			

Parametry tego układu są następujące: $t_1 = 3$, $r_1 = 2$, $\lambda_{11} = 0$, $b = 6$, $k = 3$, $\lambda_{12} = 1$, $t_2 = 4$, $r_2 = 3$, $\lambda_{22} = 1$.

Rozważany układ jest typu D, zatem $\nu_3 = (r_1 r_2 - \lambda_{12} b)/r_1 r_2 = 0$ i stąd kontrast między pierwszą a drugą grupą obiektów ma współczynnik efektywności $E_3 = 1$. Kontrast ten nie jest uwikłany z blokami. Współczynnik efektywności wszystkich kontrastów wewnątrz pierwszej grupy obiektów jest równy $E_1 = (\lambda_{11} t_1 + \lambda_{12} t_2)/k r_1 = 2/3$. Współczynnik efektywności wszystkich kontrastów wewnątrz drugiej grupy obiektów jest równy $E_2 = (\lambda_{22} t_2 + \lambda_{12} t_1)/k r_2 = 7/9$.

Potrzebne wektory do obliczania poszczególnych sum kwadratów wyliczamy praktycznie następująco. Składowe wektora $\underline{R} = \underline{B} = (G/N)\ \underline{k}$ są równe sumie bloku minus iloczyn średniej ogólnej i wielkości bloku. Przykładowo, pierwsza składowa jest równa $R_1 = 67,0 - 21,228 \cdot 3 = 3,316$. Składowe wektora $\underline{R}$ są przedstawione w tabeli 3.1.

Składowe wektora $\underline{Q} = \underline{T} - \underline{n}\, \underline{k}^{-\delta}\, \underline{B}$, są wyliczane następująco. Spośród sum blokowych wybieramy te, w których występuje i-ty obiekt, dodajemy je, a następnie dzielimy przez wielkości bloku. Tak obliczoną wartość odejmujemy od odpowiedniej sumy obiektowej. Przykładowo $T_1 = 43{,}5 - (67{,}0+62{,}3)/3 = 0{,}400$. Składowe wektora $\underline{Q}$ są podane w tabeli 3.1.

Macierz kowariancji średnich poprawionych jest równa

$$\Omega = \frac{1}{84}\begin{bmatrix} 63 & -7 & -7 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -7 & 63 & -7 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -7 & -7 & 63 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 36 & -2 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 36 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -2 & 36 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -2 & -2 & 36 \end{bmatrix}.$$

Na podstawie tej macierzy możemy obliczyć wariancję dowolnego kontrastu. W szczególnym przypadku standardowy błąd różnicy dla średnich z pierwszej grupy obiektów jest równy

$$s_d = \sqrt{\hat{\sigma}^2\left(\frac{63}{84} - 2\cdot\left(-\frac{7}{84}\right) + \frac{63}{84}\right)} = \sqrt{\frac{5}{3}\hat{\sigma}^2}.$$

Standardowy błąd różnicy dla średnich z drugiej grupy obiektów jest równy

$$s_d = \sqrt{\hat{\sigma}^2\left(\frac{36}{84} - 2\cdot\left(-\frac{2}{84}\right) + \frac{36}{84}\right)} = \sqrt{\frac{19}{21}\hat{\sigma}^2}.$$

Standardowy błąd różnicy dla średnich, z których jedna jest z pierwszej grupy, a druga z drugiej grupy jest równy

$$s_d = \sqrt{\hat{\sigma}^2\left(\frac{63}{84} - 2\cdot 0 + \frac{36}{84}\right)} = \sqrt{\frac{33}{28}\hat{\sigma}^2}.$$

Suma kwadratów do testowania hipotezy o równości prawdziwych średnich obiektowych wewnątrz pierwszej grupy jest równa

$$SST_1 = \frac{3}{0\cdot 3+1\cdot 4}\left[0{,}400^2+4{,}433^2+(-0{,}500)^2 - \frac{1}{3}(0{,}400+4{,}433-0{,}500)^2\right] = $$
$$= 10{,}352.$$

Suma kwadratów do testowania hipotezy o równości prawdziwych średnich obiektowych wewnątrz drugiej grupy jest równa

$$SST_2 = \frac{3}{1\cdot 4+1\cdot 3}\left[(-1{,}267)^2 + 2{,}333^2 + (-8{,}000)^2 + 2{,}600^2 - \right.$$
$$\left. - \frac{1}{4}(-1{,}267 + 2{,}333 - 8{,}000 + 2{,}600)^2\right] = 31{,}334.$$

Suma kwadratów do testowania hipotezy o równości prawdziwej średniej pierwszej i drugiej grupy jest równa

$$SST_{12} = \frac{3}{1\cdot 6\cdot 3}(0,400 + 4,433 - 0,500)^2 +$$

$$+ \frac{2}{1\cdot 6\cdot 4}(-1,267 + 2,333 - 8,000 + 2,600)^2 = 4,694.$$

Suma kwadratów dla bloków jest równa

$$\underline{R}'\underline{k}^{-\delta}\underline{R} = \frac{1}{3}\left[3,316^2 + \ldots + (-4,284)^2\right] = 18,009.$$

Całkowita suma kwadratów jest równa

$$\underline{y}'\underline{y} - G^2/N = 22,5^2 + \ldots + 22,1^2 - 382,1^2/18 = 67,076.$$

Sumę kwadratów dla błędu SSE uzyskujemy przez odejmowanie. Wyniki tej analizy zostały zestawione w tabeli 3.2.

Tabela 3.2

Analiza wariancji dla danych z tabeli 3.1

Źródło zmienności	Suma kwadratów	Stopnie swobody	Średni kwadrat	F_{obl}
Bloki	18,009	5		
Obiekty				
wewnątrz 1-szej grupy	10,352	2	5,176	11,55 **
wewnątrz 2-giej grupy	31,334	3	10,444	23,31 **
między grupami	4,694	1	4,694	10,47 *
Błąd	2,687	6	0,448	
Razem	67,076	17		

Rozważmy jeszcze jeden przykład. W stacji hodowlanej IHAR w Borowie przeprowadzono doświadczenie ze słonecznikiem oleistym. Doświadczenie zostało założone w wewnątrz i międzygrupowo zrównoważonym układzie blokowym typu B. Układ ten powstał przez połączenie układu zrównoważonego o blokach niekompletnych dla $t_1 = 25$ obiektów z układem o kompletnych blokach zrandomizowanych. Połączenie polegało na rozszerzeniu każdego bloku o dwa obiekty wzorcowe (obiekty nr 26 i 27). Badaną cechą w tym doświadczeniu jest średnica koszyczka. Wyniki doświadczenia są przedstawione w tabeli 3.3.

Tabela 3.3

Wyniki doświadczenia ze słonecznikiem

Nr bloku	Nr obiektu / Średnica koszyczka w cm							Suma bloku $\underline{B}$	$\underline{R}$
1	14	11	26	13	27	15	12	119,6	11,184
	16,1	17,1	15,9	16,9	18,9	17,1	17,6		
2	18	20	16	27	26	17	19	124,6	16,184
	19,0	19,6	17,8	16,1	16,5	17,1	18,5		
3	27	1	4	5	2	26	3	119,1	10,684
	17,4	17,9	17,3	17,7	16,5	15,7	16,6		
4	22	24	27	25	23	21	26	119,9	11,484
	17,4	17,3	18,3	15,5	16,1	17,4	18,0		
5	10	8	26	27	7	9	6	127,6	19,184
	18,1	19,0	18,5	18,5	17,1	18,1	18,3		
6	12	22	2	26	27	17	7	119,3	10,884
	16,6	17,6	17,5	16,1	17,0	16,5	18,0		
7	3	13	23	27	26	18	8	120,7	12,284
	17,9	15,8	16,7	18,6	16,2	17,5	18,0		
8	10	20	26	25	15	27	5	124,1	15,684
	15,8	19,1	18,2	17,4	18,0	16,8	18,8		
9	11	21	27	1	16	26	6	127,8	19,384
	21,0	16,0	18,6	19,0	19,0	16,0	18,2		
10	14	26	9	4	27	24	19	119,8	11,384
	27,0	16,3	17,7	16,1	19,3	15,8	17,6		
11	20	27	2	21	26	8	14	126,7	18,284
	19,6	16,9	17,6	17,5	18,2	19,0	17,9		
12	23	4	11	27	10	26	17	122,1	13,684
	16,7	19,7	19,0	17,2	17,7	15,3	16,5		
13	13	19	27	26	1	25	7	110,5	2,084
	16,6	16,5	16,3	14,1	15,0	16,7	15,3		
14	24	12	5	27	18	26	6	124,9	16,484
	16,0	17,0	19,1	16,1	19,4	19,8	17,5		
15	3	15	22	27	9	16	26	117,2	8,784
	15,4	17,1	17,9	16,0	15,9	17,6	17,3		

Tabela 3.3 (c. d.)

Nr bloku	Nr obiektu / Średnica koszyczka w cm							Suma bloku B	R
16	10	16	26	2	13	24	27	111,9	3,484
	15,0	15,1	14,6	18,0	16,8	15,6	16,8		
17	1	12	23	27	26	20	9	111,7	3,284
	15,3	16,5	14,3	16,2	15,2	17,1	17,1		
18	4	18	27	7	15	26	21	110,3	1,884
	15,8	16,1	16,4	15,9	15,9	14,0	16,2		
19	14	25	26	3	27	6	17	109,0	0,584
	15,7	13,8	14,5	16,2	15,7	16,5	16,6		
20	8	11	22	27	26	5	19	109,8	1,384
	15,4	15,5	14,8	16,4	16,0	17,2	14,5		
21	15	26	27	24	8	1	17	81,5	-26,916
	11,4	11,2	13,0	10,4	10,7	13,0	11,8		
22	9	18	2	11	27	25	26	87,0	-21,416
	14,2	13,9	13,1	12,4	13,0	10,5	9,9		
23	14	16	23	7	26	5	27	81,5	-26,916
	12,6	12,7	10,8	11,2	10,5	12,2	11,5		
24	26	22	13	27	4	6	20	87,0	-21,416
	11,8	11,9	12,0	11,4	12,6	12,8	14,5		
25	10	12	27	26	3	19	21	87,5	-20,916
	12,8	12,5	12,6	12,2	12,5	12,7	12,2		
26	6	15	23	27	26	2	19	88,3	-20,116
	12,1	13,3	13,0	14,1	11,3	12,2	12,3		
27	12	16	26	25	8	27	4	86,5	-21,916
	12,5	12,5	11,3	11,5	12,5	14,4	11,8		
28	1	18	26	22	27	10	14	86,8	-21,616
	12,1	13,4	10,7	11,0	12,3	13,2	14,1		
29	9	13	27	21	5	17	26	91,3	-17,116
	13,3	13,8	14,1	11,6	12,8	13,2	12,5		
30	20	24	3	27	11	26	7	98,5	-9,916
	16,8	13,8	12,3	13,5	14,3	12,9	14,9		

Macierz incydencji $\underline{n}$ tego układu jest następująca:

$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{cccccccccccccccccccccccccccccc} 1&2&3&4&5&6&7&8&9&10&11&12&13&14&15&16&17&18&19&20&21&22&23&24&25&26&27&28&29&30 \end{array} \\
\begin{array}{c} 1\\2\\3\\4\\5\\6\\7\\8\\9\\10\\11\\12\\13\\14\\15\\16\\17\\18\\19\\20\\21\\22\\23\\24\\25\\26\\27 \end{array} &
\left[\begin{array}{cccccccccccccccccccccccccccccc}
&&1&&&&&&1&&&&1&&&&1&&&&1&&&&&&&1&& \\
&&1&&&1&&&&&1&&&&&1&&&&&&1&&&&1&&&& \\
&&1&&&&1&&&&&&&&1&&&&1&&&&&&1&&&&&1 \\
&&1&&&&&&&1&&1&&&&&&1&&&&&&1&&&1&&& \\
&&1&&&&&1&&&&&&1&&&&&&1&&&1&&&&&&1& \\
&&&&1&&&&1&&&&&1&&&&&1&&&&&1&&1&&&& \\
&&&&1&1&&&&&&&1&&&&&1&&&&&1&&&&&&&1 \\
&&&&1&&1&&&&1&&&&&&&&&1&1&&&&&&1&&& \\
&&&&1&&&&&1&&&&&1&&1&&&&&1&&&&&&&1& \\
&&&&1&&&1&&&&1&&&&1&&&&&&&&&1&&&1&& \\
1&&&&&&&&1&&&1&&&&&&&&1&&1&&&&&&&&1 \\
1&&&&&1&&&&&&&&1&&&1&&&&&&&&1&&1&&& \\
1&&&&&&1&&&&&&1&&&1&&&&&&&&1&&&&&1& \\
1&&&&&&&&&1&1&&&&&&&&1&&&&1&&&&&1&& \\
1&&&&&&&1&&&&&&&1&&&1&&&1&&&&&1&&&& \\
&1&&&&&&&1&&&&&&1&1&&&&&&&1&&&&1&&& \\
&1&&&&1&&&&&&1&&&&&&1&&1&&&&&&&&1& \\
&1&&&&&1&&&&&&&1&&&&1&&&&1&&&&&&1&& \\
&1&&&&&&&&1&&&1&&&&&&&1&&&&&1&1&&&& \\
&1&&&&&&1&&&1&&&&&&1&&&&&&&1&&&&&&1 \\
&&&1&&&&&1&&1&&&&&&&1&&&&&&&1&&&&1& \\
&&&1&&1&&&&&&&&&1&&&&&1&&&&1&&&&1&& \\
&&&1&&&1&&&&&1&&&&&1&&&&&&1&&&1&&&& \\
&&&1&&&&&&1&&&&1&&1&&&&1&&&&&&&&&1 \\
&&&1&&&&1&&&&&1&&&&&&1&&&1&&&&&1&&& \\
1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1 \\
1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1
\end{array}\right]
\end{array}
$$

Jest to układ o parametrach $t_1 = 25$, $r_1 = 6$, $\lambda_{11} = 1$, $b = 30$, $k = 7$, $\lambda_{12} = r_1 = 6$, $t_2 = 2$, $r_2 = b = 30$, $\lambda_{22} = r_2 = b = 30$. Jak już powiedziano wcześniej, rozważany układ jest typu B. Stąd pierwiastki charakterystyczne ν_2 i ν_3 macierzy $\underline{M}_0$ są równe: $\nu_2 = (r_2 - \lambda_{22})/kr_2 = 0$, oraz $\nu_3 = (r_1 r_2 - \lambda_{12} b)/r_1 r_2 = 0$. Zatem współczynnik efektywności kontrastu wewnątrz drugiej grupy obiektów jest równy 1. Podobnie współczynnik efektywności kontrastu między pierwszą a drugą grupą obiektów jest równy 1. Natomiast współczynnik efektywności wszystkich kontrastów wewnątrz pierwszej grupy jest równy $E_1 = (\lambda_{11} t_1 + \lambda_{12} t_2)/kr_1 = 27/42$. W tabeli 3.4 zostały zestawione: wektor sum dla obiektów $\underline{T}$, wektor $\underline{Q}$, wektor efektów obiektowych $\hat{\underline{\tau}} = \underline{\Omega}\,\underline{Q}$, średnie niepoprawione oraz średnie poprawione.

Macierz kowariancji poprawionych średnich obiektowych $\underline{\Omega}$, typu 27×27, jest równa

$$
\underline{\Omega} = \begin{bmatrix} \underline{\Omega}_{11} & \underline{\Omega}_{12} \\ \underline{\Omega}_{21} & \underline{\Omega}_{22} \end{bmatrix}
$$

gdzie:

$\underline{\Omega}_{11} = (1/1110)(210\underline{I} - \underline{1}\,\underline{1}')$ jest typu 25×25,

$\underline{\Omega}_{12} = \underline{0}$ jest typu 25×2,

$\underline{\Omega}_{21} = \underline{0}$ jest typu 2×25,

$\underline{\Omega}_{22} = (1/30)\ \underline{I}$ jest typu 2×2.

Sumy kwadratów, stopnie swobody, średnie kwadraty i wartości empiryczne funkcji testowej zestawiono w tabeli 3.5.

Tabela 3.4

Sumy i średnie dla danych z tabeli 3.3

Nr obiektu	Sumy obiektowe $\underline{T}$	$\underline{Q}$	$\hat{\underline{\tau}} = \underline{\Omega}\,\underline{Q}$	Średnie poprawione	Średnie niepoprawione
1	92,3	1,243	0,222	15,710	15,383
2	94,9	1,714	0,311	15,799	15,817
3	90,9	-2,243	-0,428	15,060	15,150
4	93,3	1,186	0,211	15,699	15,550
5	97,8	4,843	0,903	16,391	16,300
6	95,4	0,457	0,073	15,561	15,900
7	92,4	-0,129	-0,038	15,450	15,400
8	94,6	1,343	0,241	15,729	15,768
9	96,3	2,786	0,513	16,001	16,050
10	92,6	-1,686	-0,332	15,156	15,433
11	99,3	4,329	0,805	16,293	16,550
12	92,7	-0,086	-0,030	15,458	15,450
13	91,9	0,329	0,049	15,537	15,317
14	93,4	1,486	0,266	15,756	15,567
15	92,8	1,229	0,219	15,707	15,467
16	94,7	1,914	0,349	15,837	15,783
17	91,7	-0,843	-0,173	15,315	15,283
18	99,3	5,829	1,083	16,571	16,550
19	92,1	0,600	0,100	15,588	15,350
20	106,7	10,614	1,995	17,483	17,783
21	90,9	-3,886	-0,749	14,739	15,150
22	90,5	-0,929	-0,189	15,229	15,083
23	87,6	-4,429	-0,851	14,637	14,600
24	88,9	-4,886	-0,938	14,550	14,817
25	85,4	-5,600	-1,073	14,415	14,233
26	440,7	-23,943	-0,798	14,690	14,690
27	473,4	8,757	0,292	15,780	15,780

średnia ogólna $\overline{y} = 15,488$

Tabela 3.5

Analiza wariancji doświadczenia ze słonecznikiem

Źródło zmienności	Suma kwadratów	Stopnie swobody	Średni kwadrat	F_{obl}
Bloki	1067,495	29		
Obiekty:				
wewnątrz 1-szej grupy	57,238	24	2,385	2,60 **
wewnątrz 2-giej grupy	17,821	1	17,821	19,39 **
między grupami	5,481	1	5,481	5,96 *
Błąd	141,525	154	9,919	
Razem	1289,560	209		

Standardowe błędy różnic są równe:

wewnątrz pierwszej grupy

$$s_d = \sqrt{0,919\left(\frac{209}{1110} - 2\cdot\left(-\frac{1}{1110}\right) + \frac{209}{1110}\right)} = 0,589$$

wewnątrz drugiej grupy

$$s_d = \sqrt{0,919\left(\frac{1}{30} - 2\cdot 0 + \frac{1}{30}\right)} = 0,247$$

między grupami

$$s_d = \sqrt{0,919\left(\frac{209}{1110} - 2\cdot 0 + \frac{1}{30}\right)} = 0,451$$

Literatura cytowana

[1] Agrawal, H., On balanced block designs with two different number of replications, J. Indian Statist. Assoc. 1 (1963), str. 145-151.

[2] Caliński, T., On some desirable patterns in block designs, Biometrics 27 (1971), str. 275-292.

[3] Corsten, L. C., Balanced block designs with two different number of replicates, Biometrics 18 (1962), str. 499-519.

[4] Pearce, S. C., Supplemented balance, Biometrika 47 (1960), str. 263-271.

[5] Pease, M. C., Methods of matrix algebra, New York 1965.

[6] Tocher, K. D., The design and analysis of block experiments, J. R. Statist. Soc. B 14 (1952), str. 45-91.